

الوحدة الأولى
الحركة فى خط مستقيم

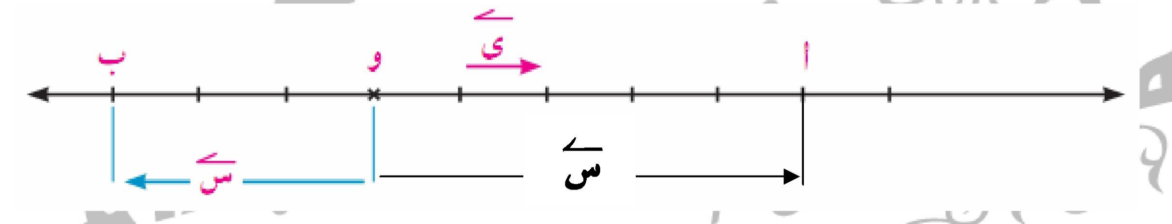
١ - ١ تفاضل الدوال المتجهه

الحركة فى خط مستقيم:

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم فيقال أنه يتحرك حركة خطية.

موضع الجسيم :

إذا تحرك الجسيم حركة خطية فإن موضع الجسيم سيتغير من لحظة لأخرى ولتعيين موضع الجسيم نختار نقطة ثابتة "و" كنقطة أصل ونحدد متجه وحدة $\vec{ى}$ فى إتجاه الحركة على الخط المستقيم فإذا كان الجسيم يمين نقطة الأصل يكون موضعه موجب وإذا كان يسار نقطة الأصل يكون موضعه سالب ففى الشكل:



إذا كان الجسيم عند الموضع (أ) على الخط المستقيم فإن $\vec{س} = ٥ \vec{ى}$

بينما إذا كان الجسيم عند الموضع (ب) على الخط المستقيم فإن $\vec{س} = -٣ \vec{ى}$

ونلاحظ أن موضع الجسيم هو كمية متجهه يمكن التعبير عنه كدالة فى الزمن أى أن $\vec{س} = د(ن)$

ويقاس معيار $\vec{س}$ بوحدة المتر فى النظام الدولى للوحدات

الإزاحة :

تعرف إزاحة الجسيم $\vec{ف}$ بأنها التغير فى موضعه

فإذا كان الجسيم عند الموضع أ وتحرك الى الموضع أَ فإن:

الإزاحة $\vec{ف} = \Delta \vec{س}$ حيث $\Delta \vec{س} = \vec{س}' - \vec{س}_{.}$ ونلاحظ أن:

- الإزاحة $\Delta \vec{س}$ تكون موجبة إذا كان الموضع النهائى للجسم على يمين الموضع الإبتدائى

- الإزاحة $\Delta \overleftarrow{س}$ تكون سالبة إذا كان الموضع النهائى للجسم على يسار الموضع الإبتدائى
- إزاحة الجسيم $\overleftarrow{ف}$ كمية متجهه يمكن التعبير عنه كدالة فى الزمن أى أن $\overleftarrow{ف} = د(ن)$
- إذا كان موضع الجسيم عند بداية قياس الزمن عند نقطة الأصل فإن $\overleftarrow{س}_{\circ} = \overleftarrow{\circ}$

متجه السرعة :

إذا كانت $\overleftarrow{ف} = \Delta \overleftarrow{س}$ هى إزاحة الجسيم خلال فترة زمنية $\Delta ن$ فإن متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{ع}_م$ يساوى خارج قسمة الإزاحة على الزمن أى أن:

$$\overleftarrow{ع}_م = \frac{\Delta \overleftarrow{س}}{\Delta ن} = \frac{\overleftarrow{س}(ن + \Delta ن) - \overleftarrow{س}(ن)}{\Delta ن}$$

ويكون متجه السرعة اللحظية $\overleftarrow{ع}$ عند اى لحظة زمنية هو:

$$\overleftarrow{ع} = \lim_{\Delta ن \to \circ} \frac{\Delta \overleftarrow{س}}{\Delta ن} = \lim_{\Delta ن \to \circ} \frac{\overleftarrow{س}(ن + \Delta ن) - \overleftarrow{س}(ن)}{\Delta ن}$$

وحيث أن الطرف الأيسر هو المشتقة الأولى لمتجه الموضع

$$\therefore \overleftarrow{ع} = \frac{ء \overleftarrow{س}}{ء ن}$$

السرعة هى ميل المماس لمنحنى الموضع – الزمن

وحيث أن $\overleftarrow{س}_{\circ}$ متجهاً ثابتا $\therefore$ متجه السرعة يساوى معدل تغير الإزاحة بالنسبة للزمن

$$\therefore \overleftarrow{ع} = \frac{ء \overleftarrow{ف}}{ء ن}$$

السرعة هى ميل المماس لمنحنى الإزاحة – الزمن

ويقاس معيار السرعة بوحدة متر / ث فى النظام الدولى للوحدات

ملاحظة:

يمكن استخدام الرموز س ، ف ، ع للتعبير عن القياس الجبرى لمتجهات الموضع $\overleftarrow{س}$ والإزاحة $\overleftarrow{ف}$ والسرعة $\overleftarrow{ع}$

السرعة :

السرعة هى الكمية القياسية التى تعبر عن معيار متجه السرعة أى أن:

السرعة $= ||\overrightarrow{ع}|| = ||\frac{ء\overrightarrow{س}}{ءن}|| = ||\frac{ء\overrightarrow{ف}}{ءن}||$

وباستخدام القياسات الجبرية فإن السرعة $= |ع| = |\frac{ءس}{ءن}| = |\frac{ءف}{ءن}|$

مثـــال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان موضعه $\overrightarrow{س}$ عند أى لحظة زمنية ن يعطى بالعلاقة:

$\overrightarrow{س}(ن) = (ن^٢ - ٤ن + ٣)\overrightarrow{ى}$ حيث س مقاسة بالمتر ، ن مقاسة بالثانية

(أ) أوجد إزاحة الجسيم خلال الثوانى الثلاث الأولى

(ب) أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم عندما ن ∋ [٠، ٢]

(جـ) أوجد متجه سرعة الجسيم عندما ن = ٤

(د) من خلال منحنى الموضع – الزمن ، منحنى السرعة – الزمن قم بتحليل حركة الجسيم وبين متى يغير الجسيم إتجاه حركته.

الحـــل:

بفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه الحركة

(أ) ∵ $\overrightarrow{س}(ن) = (ن^٢ - ٤ن + ٣)\overrightarrow{ى}$ بوضع ن = ٠ ∴ $\overrightarrow{س_٠} = ٣\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{س_٠} = (ن^٢ - ٤ن + ٣)\overrightarrow{ى} - ٣\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ف} = (ن^٢ - ٤ن)\overrightarrow{ى}$

عندما ن = ٣ ∴ $\overrightarrow{ف} = (٣^٢ - ٤ \times ٣)\overrightarrow{ى} = -٣\overrightarrow{ى}$

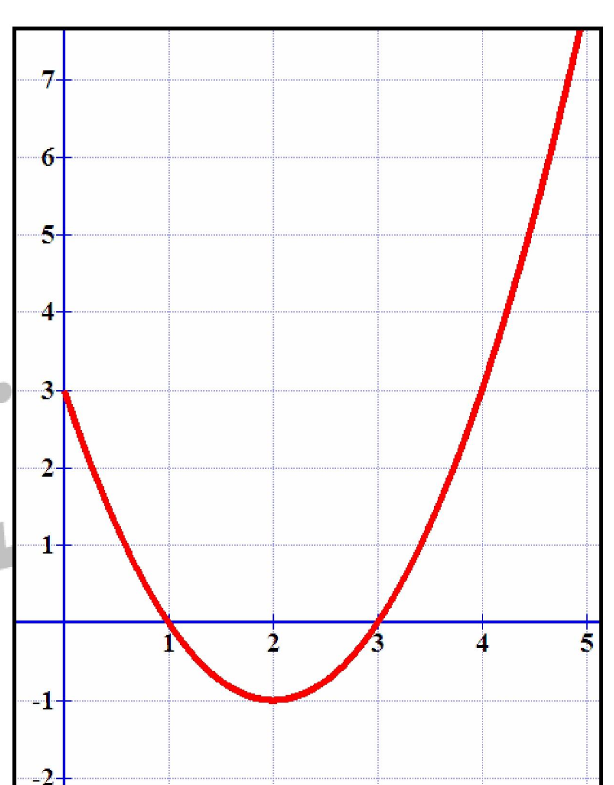
(ب) ∵ $\overrightarrow{ع_م} = \frac{\Delta \overrightarrow{س}}{\Delta ن} = \frac{\overrightarrow{س}(٢) - \overrightarrow{س}(٠)}{\Delta ن}$

∴ $\overrightarrow{ع_م} = \frac{\Delta \overrightarrow{س}}{\Delta ن} = \frac{(٢^٢ - ٤ \times ٢ + ٣)\overrightarrow{ى} - (٠ - ٠ + ٣)\overrightarrow{ى}}{٢ - ٠} = \frac{-٤\overrightarrow{ى}}{٢} = -٢\overrightarrow{ى}$

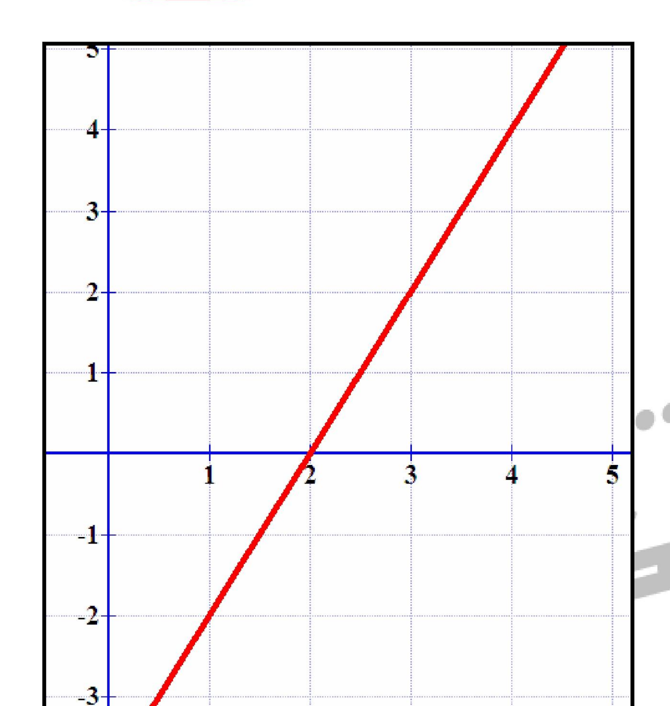
(جـ) ∵ $\overrightarrow{ع} = \frac{ء\overrightarrow{س}}{ءن}$ ∴ $\overrightarrow{ع} = (٢ن - ٤)\overrightarrow{ى}$

عندما ن = ٤ ∴ $\overrightarrow{ع} = (٢ \times ٤ - ٤)\overrightarrow{ى} = ٤\overrightarrow{ى}$

(د)



منحنى الموضع - الزمن



منحنى السرعة - الزمن

من منحنى الموضع ـ الزمن نلاحظ أن :

- **الجسيم كان على بعد ٣ متر يمين نقطة الأصل عند بداية الزمن ن = ٠**
- **الجسيم صار عند نقطة الأصل عند ن = ١ ، ن = ٣**
- **الجسيم على بعد ١ متر يسار نقطة الأصل عند ن = ٢**

من منحنى السرعة ـ الزمن نلاحظ أن :

- **السرعة الإبتدائية للجسيم ٤ م/ث عكس إتجاه $\overleftarrow{ى}$**
- **الجسيم تصبح سرعته صفر (يسكن لحظيا) عند ن = ٢**
- **الجسيم يغير إتجاه حركته عند ن = ٢ ويتحرك فى إتجاه $\overleftarrow{ى}$**

العجلة :

إذا كانت $\Delta\ \overleftarrow{ع}$ هى التغير فى متجه السرعة خلال فترة زمنية Δن فإن متجه العجلة المتوسطة $\overleftarrow{جـ}_م$ يكون:

$$\overleftarrow{جـ}_م = \frac{\Delta\ \overleftarrow{ع}}{\Delta ن} = \frac{\overleftarrow{ع}\ (ن + \Delta ن) - \overleftarrow{ع}\ (ن)}{\Delta ن}$$

ويكون متجه العجلة اللحظية $\overleftarrow{جـ}$ عند اى لحظة زمنية هو:

$$\overleftarrow{ج} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta \overleftarrow{ع}}{\Delta ن} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\overleftarrow{ع}(ن + \Delta ن) - \overleftarrow{ع}(ن)}{\Delta ن}$$

وحيث أن الطرف الأيسر هو المشتقة الأولى لمتجه السرعة

$$\therefore \overleftarrow{ج} = \frac{ء \overleftarrow{ع}}{ء ن}$$

العجلة هى ميل المماس لمنحنى السرعة – الزمن

أى أن العجلة هى معدل تغير متجه السرعة بالنسبة للزمن

ويقاس معيار العجلة بوحدة م/ث/ث أى م/ث^2 فى النظام الدولى للوحدات

ملاحظة:

$$\because \overleftarrow{ع} = \frac{ء \overleftarrow{س}}{ء ن} = \frac{ء \overleftarrow{ف}}{ء ن}$$

$$\therefore \overleftarrow{ج} = \frac{ء^2 \overleftarrow{س}}{ء ن^2} = \frac{ء^2 \overleftarrow{ف}}{ء ن^2}$$

إى أن العجلة هى المشتقة الثانية لمتجه الموضع أو متجه الإزاحة

القياس الجبرى لمتجه السرعة والعجلة:

١) إذا كان $ج > 0$ فإن ع تتزايد وهذا يعنى أن الجسيم يتحرك بشكل أسرع فى الإتجاه الموجب أو أن الجسيم يتحرك ببطء فى الإتجاه السالب.

٢) إذا كان $ج < 0$ فإن ع تتناقص وهذا يعنى أن الجسيم يتحرك ببطء أكثر فى الإتجاه الموجب أو أن الجسيم يتحرك بشكل أسرع فى الإتجاه السالب.

الحركة المتسارعة والحركة التقصيرية:

١) إذا كان متجه عجلة جسيم فى فترة زمنية ما فى نفس إتجاه متجه سرعته خلال تلك الفترة فإن حركة الجسيم تكون متسارعة خلال تلك الفترة

وفى هذه الحالة يكون القياس الجبرى لمتجهى العجلة والسرعة لهما نفس الإشارة

وبالتالى فإن حاصل ضربهما يكون موجب (اى أكبر من الصفر)

∴ الحركة متسارعة ⟺ ع ، ج لهما نفس الإشارة ⟺ $ع ج > 0$

٢) إذا كان متجه عجلة جسيم فى فترة زمنية ما فى إتجاه مضاد لمتجه سرعته خلال تلك الفترة فإن حركة الجسيم تكون تقصيرية خلال تلك الفترة

وفى هذه الحالة يكون القياس الجبرى لمتجهى العجلة والسرعة مختلفين فى الإشارة

وبالتالى فإن حاصل ضربهما يكون سالب (اى أصغر من الصفر)

∴ الحركة تقصيرية ⟺ ع ، ج مختلفين فى الإشارة ⟺ $ع ج < 0$

مثـــال:

إذا كان متجه سرعة جسيم $\overleftarrow{\text{ع}}$ عند أى لحظة زمنية ن يعطى بالعلاقة:

$\overleftarrow{\text{ع}}\,(\text{ن}) = -(\text{ن}^{2} - 6\text{ن} + 5)\,\overleftarrow{\text{ى}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى إتجاه حركة الجسيم

(أ) متى يغير الجسيم إتجاه حركته؟ (ب) متى تزداد سرعة الجسيم؟ ومتى تتناقص؟

(جـ) أوجد عجلة حركة الجسيم عندما تنعدم سرعته

الحـــل:

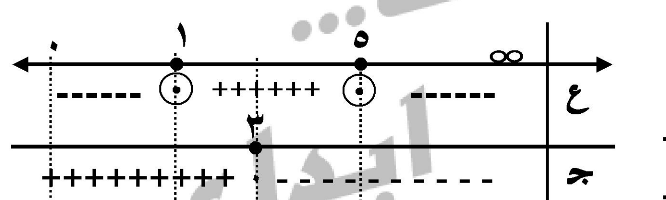
$\because\ \overleftarrow{\text{ع}}\,(\text{ن}) = -(\text{ن}^{2} - 6\text{ن} + 5)\,\overleftarrow{\text{ى}}$ $\therefore\ \overleftarrow{\text{جـ}} = \dfrac{d\overleftarrow{\text{ع}}}{d\text{ن}} = -(2\text{ن} - 6)\,\overleftarrow{\text{ى}}$

(أ) يغير الجسيم إتجاه حركته عندما تصبح سرعته تساوى صفر

$\therefore\ \text{ن}^{2} - 6\text{ن} + 5 = 0$ $\therefore\ (\text{ن} - 1)(\text{ن} - 5) = 0$

$\therefore\ \text{ن} = 1$ أو $\text{ن} = 5$ $\therefore$ الجسم يغير أتجاه حركته عندما $\text{ن} = 1$ وعندما $\text{ن} = 5$

(ب) تزداد سرعة الجسيم عندما $\text{جـ}\,\text{ع} > 0$



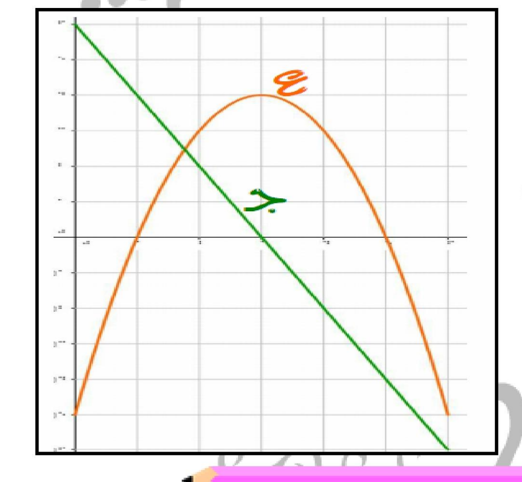
ومن بحث إشارة كل من جـ، ع نجد أن:

$\text{جـ}\,\text{ع} > 0$ فى الفترة $]1، 3[$ وفى الفترة $]5، \infty[$

وتتناقص سرعة الجسيم عندما $\text{جـ}\,\text{ع} < 0$

ومن بحث إشارة كل من جـ، ع نجد أن:

$\text{جـ}\,\text{ع} < 0$ فى الفترة $]0، 1[$ وفى الفترة $]3، 5[$



(جـ) عجلة حركة الجسيم عندما تنعدم السرعة

$\because$ السرعة تنعدم عند $\text{ن} = 1$ ، $\text{ن} = 5$

$\therefore\ \overleftarrow{\text{جـ}} = -(2 \times 1 - 6)\,\overleftarrow{\text{ى}} = 4\,\overleftarrow{\text{ى}}$

، $\overleftarrow{\text{جـ}} = -(2 \times 5 - 6)\,\overleftarrow{\text{ى}} = -4\,\overleftarrow{\text{ى}}$

ملاحظات:

1) إذا عاد الجسم إلى موضعه الأصلى فإن: $\text{ف} = 0$

2) إذا وصل الجسيم إلى أقصى بعد فإن: $\text{ع} = 0$

3) إذا تحرك الجسيم بأقصى سرعة أو بسرعة منتظمة فإن: $\text{جـ} = 0$

متجه العجلة عندما يكون متجه السرعة دالة فى الموضع:

إذا كان $ع = د(س)$ ، $س = د(ن)$ وباستخدام قاعدة التسلسل نجد أن:

$$\frac{ءع}{ءن} = \frac{ءع}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن} \Leftarrow \therefore جـ = ع \frac{ءع}{ءس}$$

مثـــال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين س ، ع تعطى فى الصورة $ع = \frac{٥}{٤ + س}$

حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ، س مقاسة بوحدة متر أوجد عجلة الحركة عندما $س = ٢$ متر

الحـــل:

$\because ع = \frac{٥}{٤ + س}$ $\therefore \frac{ءع}{ءس} = \frac{-٥}{(٤ + س)^٢}$

$\therefore جـ = ع \frac{ءع}{ءس} = \frac{٥}{٤ + س} \times \frac{-٥}{(٤ + س)^٢} = \frac{-٢٥}{(٤ + س)^٣}$

عندما $س = ٢$ متر $\therefore جـ = \frac{-٢٥}{(٤ + ٢)^٣} = \frac{-٢٥}{٢١٦}$ م/ث^٢

مثـــال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع فى علاقة مع القيـاس الجبرى لمتجه موضعه س معطاه بالصورة $ع^٢ = \frac{١}{٨(٤ - س^٢)}$ أوجد جـ بدلالة س حيث جـ هو القياس الجـبرى لعجلة الحركة ثم أوجد اصغر سرعة للجسيم المتحرك.

الحـــل:

$\because ع^٢ = \frac{١}{٨(٤ - س^٢)} = \frac{١}{٨}(٤ - س^٢)^{-١}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة الى س

$\therefore ٢ع \frac{ءع}{ءس} = \frac{-١}{٨}(٤ - س^٢)^{-٢} \times (-٢س)$ ، $\because جـ = ع \frac{ءع}{ءس}$

$\therefore ٢جـ = \frac{٢س}{٨(٤ - س^٢)^٢} \Leftarrow \therefore جـ = \frac{س}{٨(٤ - س^٢)^٢}$

اصغر سرعة للجسيم المتحرك عندما $جـ = ٠$ $\therefore س = ٠$

$\therefore$ ع^2 = $\frac{1}{8(4-0)}$ = $\frac{1}{32}$ $\therefore$ ع = $\pm\frac{1}{\sqrt{32}}$ = $\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}$

مثــــال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه السرعة ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س بالصورة ع^2 = ١٦ − ٩جتاس أوجد أقصى سرعة للجسيم وعجلة الحركة عندئذ

الحــــل:

$\therefore$ ع^2 = ١٦ − ٩جتاس بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore$ ٢ع $\frac{دع}{دس}$ = ٩جاس $\therefore$ ع $\frac{دع}{دس}$ = $\frac{9}{2}$جاس ، $\because$ جـ = ع $\frac{دع}{دس}$ **$\therefore$ جـ = $\frac{9}{2}$جاس**

أقصى سرعة للجسيم تحدث عندما جـ = ٠ $\therefore$ $\frac{9}{2}$جاس = ٠ $\therefore$ جاس = ٠

$\therefore$ س = ٠ أو س = ١٨٠° ويكون الحل العام هو: س = ر π حيث ر $\in$ ص

عندما ر عدد زوجى $\therefore$ س = ٠ أو ٣٦٠° أو ٧٢٠° أو ......

$\therefore$ جتاس = ١ $\therefore$ ع^2 = ١٦ − ٩جتاس = ١٦ − ٩ = ٧ $\therefore$ ع = $\pm\sqrt{7}$

عندما ر عدد فردى $\therefore$ س = ١٨٠° أو ٥٤٠° أو ٩٠٠° أو ......

$\therefore$ جتاس = −١ $\therefore$ ع^2 = ١٦ − ٩جتاس = ١٦ + ٩ = ٢٥ $\therefore$ ع = $\pm$٥

$\therefore$ أقصى سرعة للجسيم ع = $\pm$ ٥ وحدة سرعة والعجلة عندها تساوى صفر

مثــــال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم تبعا للعلاقة س = أ جا ك ن حيث س يعبر عن القياس الجبرى لمتجه الموضع ، ن الزمن ، أ ، ك $\in$ ح :

(أ) أوجد العلاقة بين ع ، س حيث ع القياس الجبرى لمتجه السرعة. (ب) أوجد ع عندما س = $\frac{أ}{2}$.

(جـ) أوجد الزمن المستغرق حتى يكون س = $\frac{-أ}{2}$ وأوجد عجلة الحركة عندئذ.

الحــــل:

$\because$ س = أ جا ك ن ، $\because$ ع = $\frac{دس}{دن}$ ، جـ = $\frac{دع}{دن}$

$\therefore$ ع = أ ك جتا ك ن ، $\therefore$ جـ = −أ ك^2 جا ك ن

(أ) العلاقة بين ع، س

∵ ع = أ ك جتا ك ن   بتربيع الطرفين   ∴ $\text{ع}^2 = \text{أ}^2\,\text{ك}^2\,\text{جتا}^2\,\text{ك ن}$

∴ $\text{ع}^2 = \text{أ}^2\,\text{ك}^2(1 - \text{جا}^2\,\text{ك ن}) = \text{ك}^2(\text{أ}^2 - \text{أ}^2\,\text{جا}^2\,\text{ك ن})$ ، ∵ س = أ جا ك ن

∴ $\text{ع}^2 = \text{ك}^2(\text{أ}^2 - \text{س}^2)$ ∴ $\text{ع} = \pm\,\text{ك}\sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}$

(ب) ع عندما س = $\frac{\text{أ}}{2}$.

∴ $\text{ع} = \pm\,\text{ك}\sqrt{\text{أ}^2 - \left(\frac{\text{أ}}{2}\right)^2} = \pm\,\text{ك}\sqrt{\text{أ}^2 - \frac{\text{أ}^2}{4}} = \pm\,\text{ك}\sqrt{\frac{3\text{أ}^2}{4}}$ ∴ $\text{ع} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{أ ك}$

(جـ) الزمن المستغرق حتى يكون س = $\frac{-\text{أ}}{2}$

∵ س = أ جا ك ن   ∴ $\frac{-\text{أ}}{2}$ = أ جا ك ن   ∴ جا ك ن = $\frac{-1}{2}$

∵ جا ك ن = $\frac{-1}{2}$ سالب   ∴ ك ن فى الربع الثالث أو الربع الرابع ، ∵ جا $30^\circ = \frac{1}{2}$

∴ ك ن = $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ أو   ك ن = $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

ويكون الحل العام هو:

ك ن = $\frac{7\pi}{6} + 2\,\text{ر}\,\pi$ ∴ $\text{ن} = \frac{7\pi}{6\,\text{ك}} + \frac{2\,\text{ر}\,\pi}{\text{ك}}$

أو ك ن = $\frac{11\pi}{6} + 2\,\text{ر}\,\pi$ ∴ $\text{ن} = \frac{11\pi}{6\,\text{ك}} + \frac{2\,\text{ر}\,\pi}{\text{ك}}$

إيجاد جـ

∵ جـ = $-\text{أ}\,\text{ك}^2$ جا ك ن ، جا ك ن = $\frac{-1}{2}$ بالتعويض

∴ جـ = $-\text{أ}\,\text{ك}^2 \times \frac{-1}{2}$ ∴ جـ = $\frac{1}{2}\,\text{أ}\,\text{ك}^2$



دراسة المنحنيات:

اولا: منحنى الموضع – الزمن و منحنى الإزاحة – الزمن:

١) الجسم يكون يمين نقطة الأصل إذا كان منحنى الموضع أعلى محور السينات ويكون يسار نقطة الأصل إذا كان المنحنى أسفل محور السينات.
٢) الجسم يعود إلى نقطة الأصل عند نقط تقاطع منحنى الموضع مع محور السينات.
٣) الإزاحة تكون موجبه إذا كان منحنى الإزاحة أعلى محور السينات وتكون سالبة إذا كان المنحنى أسفل محور السينات.
٤) الإزاحة تنعدم عند نقط تقاطع منحنى الإزاحة مع محور السينات.
٥) سرعة الجسم تكون موجبة إذا كان ميل المماس لمنحنى الموضع (الإزاحة) موجب أى يكون المنحنى متزايد وهذا يعنى أن الجسم يتحرك للأمام.
٦) سرعة الجسم تكون سالبة إذا كان ميل المماس لمنحنى الموضع (الإزاحة) سالب أى يكون المنحنى متناقص وهذا يعنى أن الجسم يتحرك للخلف.
٧) السرعة تنعدم عند نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحنى الموضع أو الإزاحة.
٨) العجلة تكون موجبة أذا كان منحنى الموضع (الإزاحة) محدب لأسفل.
٩) العجلة تكون سالبة إذا كان منحنى الموضع (الإزاحة) محدب لأعلى.
١٠) العجلة تنعدم عند نقط الإنقلاب.

ثانيا: منحنى السرعة – الزمن:

١) السرعة تكون موجبة إذا كان المنحنى أعلى محور السينات وهذا يعنى أن الحركة تكون فى الإتجاه الموجب أى أن الجسم يتحرك للأمام.
٢) السرعة تكون سالبة إذا كان المنحنى أسفل محور السينات وهذا يعنى أن الحركة تكون فى الإتجاه السالب أى أن الجسم يتحرك للخلف.
٣) السرعة تنعدم عند نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات وبالتالى يتغير إتجاه الحركة عندها.
٤) العجلة تكون موجبة إذا كان ميل المماس للمنحنى موجب أى أن المنحنى متزايد.
٥) العجلة تكون سالبة إذا كان ميل المماس للمنحنى سالب أى أن المنحنى متناقص.
٦) العجلة تنعدم عند نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحنى.
٧) السرعة تتزايد عندما ع جـ > ٠ (الحركة المتسارعة) وهذا يتحقق إذا كان المنحنى أعلى محور السينات وميله موجب أو أسفل محور السينات وميله سالب
٨) السرعة تتناقص عندما ع جـ < ٠ (الحركة التقصيرية) وهذا يتحقق إذا كان المنحنى أعلى محور السينات وميله سالب أو أسفل محور السينات وميله موجب.

ثالثا: منحنى العجلة – الزمن:

١) العجلة تكون موجبة إذا كان المنحنى أعلى محور السينات
٢) العجلة تكون سالبة إذا كان المنحنى أسفل محور السينات
٣) العجلة تنعدم عند نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

ملاحظات هامة:

١) متجهات الموضع والإزاحة والسرعة والعجلة كلها دوال فى الزمن.

٢) متجه الموضع يمكن أن يحتوى أو لا يحتوى على حد مطلق ويمكن أن يبدأ او لا يبدأ من نقطة الأصل بينما متجه الإزاحة لايحتوى على حد مطلق ويبدأ دائما من نقطة الأصل.

٣) الجسيم لايتحرك على أى من منحنيات الموضع أو الإزاحة أو السرعة أو العجلة لأن الحركة تحدث دائما فى خط مستقيم.

٤) إتجاه الحركة هو نفس إتجاه السرعة دائما.

٥) السرعة المتوسطة تساوى إجمالى المسافة المقطوعة على الزمن الكلى بينما متجه السرعة المتوسطة يساوى متجه الإزاحة على الزمن الكلى.

مثـــال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم تبعا للعلاقة ف = $ن^٣ - ٣ن^٢$ حيث ف مقاسة بالمتر ، ن بالثانية أوجد:

(أ) عجلة الحركة عندما تنعدم السرعة.

(ب) سرعته المتوسطة ، متجه سرعته المتوسطة خلال الفترة [٠، ٥].

الحــل:

∵ ف = $ن^٣ - ٣ن^٢$ ، ∵ ع = $\frac{ءف}{ءن}$ ، جـ = $\frac{ءع}{ءن}$

∴ ع = $٣ن^٢ - ٦ن$ ، ∴ جـ = ٦ن − ٦

(أ) ∵ السرعة تنعدم ∴ $٣ن^٢ - ٦ن = ٠$ ∴ ٣ن(ن − ٢) = ٠ ∴ ن = ٠ أو ن = ٢ ث

عندما ن = ٠ ∴ جـ = ٦ × ٠ − ٦ ∴ جـ = −٦ $م/ث^٢$

وعندما ن = ٢ ∴ جـ = ٦ × ٢ − ٦ ∴ جـ = ٦ $م/ث^٢$

(ب) لإيجاد السرعه المتوسطة نوجد المسافة المقطوعة خلال الفترة [٠، ٥]

∵ السرعة انعدمت عند ن = ٢ ∴ الجسم غير إتجاه حركته عند ن = ٢

∴ المسافة المقطوعة خلال الفترة [٠، ٥]

= القيمة المطلقة للإزاحة خلال الفترة [٠، ٢] + القيمة المطلقة للإزاحة خلال الفترة [٢، ٥]

= |ف(٢) − ف(٠)| + |ف(٥) − ف(٢)|

= $|(٢^٣ - ٣ × ٢^٢) - ٠| + |(٥^٣ - ٣ × ٥^٢) - (٢^٣ - ٣ × ٢^٢)|$

= |−٤| + |(٥٠) − (−٤)| = ٥٨

∴ السرعه المتوسطة خلال الفترة [٠، ٥] = $\frac{٥٨}{٥}$ = ١١,٦ م/ث

ولإيجاد متجه السرعه المتوسطة نوجد الإزاحة خلال الفترة [٠، ٥]

∴ الإزاحة خلال الفترة [٠، ٥] = ف(٥) − ف(٠) = ($٥^{٣}$ − ٣ × $٥^{٢}$) − ٠ = ٥٠

∴ متجه السرعه المتوسطة $\overleftarrow{ع_م}$ = $\frac{٥٠ \overleftarrow{ى}}{٥}$ = ١٠ $\overleftarrow{ى}$ م/ث حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه الحركة

مثـــال:

الشكل يبين سرعة جسيم ع = د(ن) يتحرك فى خط مستقيم

(أ) متى يتحرك الجسيم للأمام؟ ومتى يتحرك للخلف؟
ومتى تتزايد سرعته؟ ومتى تتباطأ؟

(ب) متى تكون عجلة الحركة موجبة؟ ومتى تكون سالبة؟
ومتى تنعدم؟

(جـ) متى تصل سرعة الجسيم لقيمتها العظمى؟

(د) متى يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية واحدة؟

الحـــل:

(أ) الجسيم يتحرك للأمام عندما تكون السرعة موجبة أى المنحنى أعلى محور السينات

∴ الجسيم يتحرك للأمام فى الفترة]٠ ، ١[وفى الفترة]٥ ، ٧[

والجسيم يتحرك للخلف عندما تكون السرعة سالبة أى المنحنى أسفل محور السينات

∴ الجسيم يتحرك للخلف فى الفترة]١ ، ٥[

تتزايد سرعة الجسيم عندما عجـ > ٠

أى إذا كان المنحنى أعلى محور السينات وميله موجب أو أسفل محور السينات وميله سالب

∴ تتزايد سرعة الجسيم فى الفترة]١ ، ٢[وفى الفترة]٥ ، ٦[

وتتباطأ سرعة الجسيم عندما عجـ < ٠

أى إذا كان المنحنى أعلى محور السينات وميله سالب أو أسفل محور السينات وميله موجب

∴ تتباطأ سرعة الجسيم فى الفترة]٠ ، ١[وفى الفترة]٣ ، ٥[وفى الفترة]٦ ، ٧[

(ب) عجلة الحركة تكون موجبة عندما يكون ميل المماس موجب أى أن المنحنى متزايد

∴ عجلة الحركة موجبة فى الفترة]٣ ، ٦[

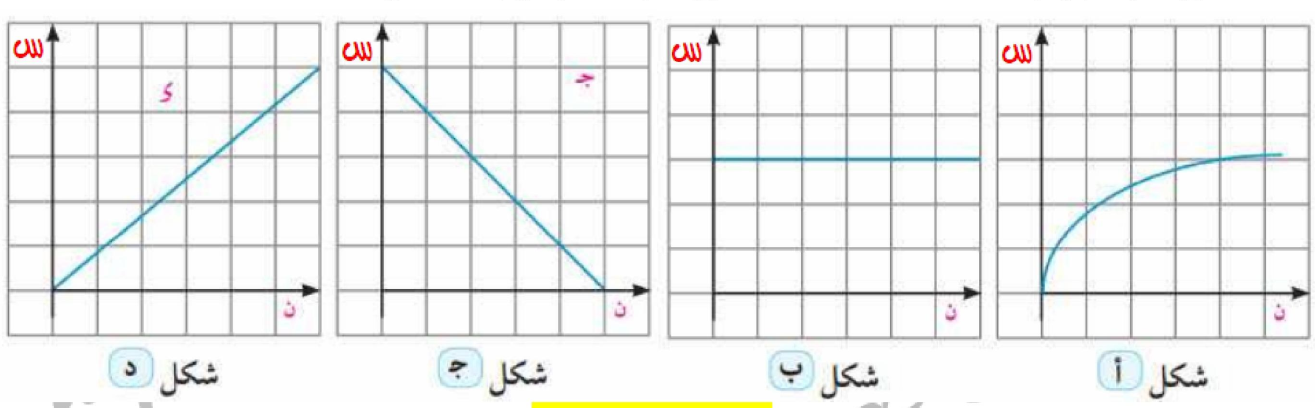
وعجلة الحركة تكون سالبة عندما يكون ميل المماس سالب أى أن المنحنى متناقص

∴ عجلة الحركة سالبة فى الفترة]٠ ، ٢[وفى الفترة]٦ ، ٧[
وعجلة الحركة تنعدم عند نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحنى
∴ عجلة الحركة تنعدم فى الفترة]٢ ، ٣[وفى الفترة]٧ ، ٩[
ⓙ سرعة الجسيم تصل لقيمتها العظمى عند ن = ٠ وفى الفترة]٢ ، ٣[
ⓓ يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية واحدة فى الفترة]٧ ، ٩[

مثـــال:

أى من الأشكال الآتية يبين أن:

❶ الجسيم متوقف. ❷ الجسيم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة.
❸ الجسم يعود للخلف. ❹ سرعة الجسيم تتناقص.



الحـــل:

شكل (أ)

∵ المنحنى متزايد ∴ ميل المماس للمنحنى موجب ∴ السرعة موجبة
، ∵ المنحنى محدب لأعلى ∴ المشتقة الثانية (العجلة) سالبة ∴ العجلة سالبة
∴ ع جـ < ٠ ∴ هذا الشكل يبين أن سرعة الجسيم تتناقص

شكل (ب)

∵ المنحنى ثابت ∴ ميل المماس للمنحنى يساوى صفر
∴ السرعة تساوى صفر ∴ هذا الشكل يبين أن الجسيم متوقف

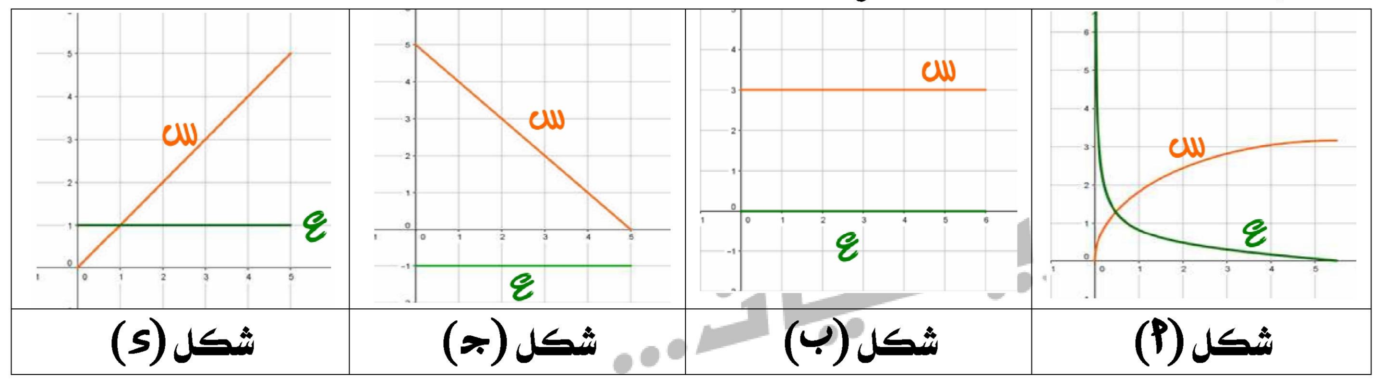
شكل (جـ)

∵ المنحنى متناقص ∴ ميل المماس للمنحنى سالب وثابت لأن المنحنى خط مستقيم
∴ السرعة سالبة ∴ هذا الشكل يبين أن الجسم يعود للخلف.

شكل (ى)

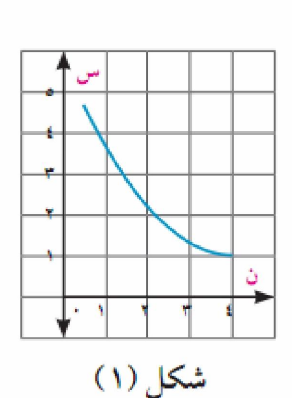
∵ المنحنى متزايد ∴ ميل المماس للمنحنى موجب وثابت لأن المنحنى خط مستقيم
∴ السرعة موجبة ∴ هذا الشكل يبين أن الجسيم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة.

وتوضح الأشكال التالية منحنيات الموضع والسرعة لكل حالة

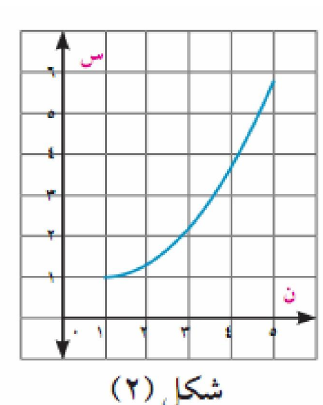


📖 **مثـــال:**

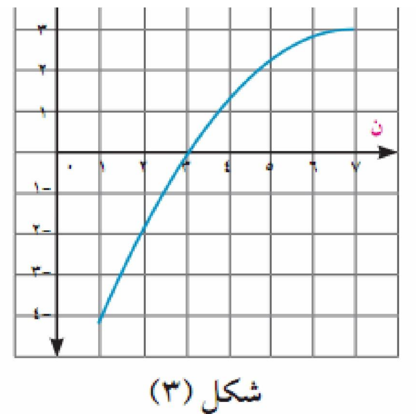
المنحنيات التالية تمثل منحنى الموضع – الزمن حدد إشارة القياس الجبرى لمتجه السرعة فى كل منحنى ثم عين ما إذا كان الجسيم يتحرك بتسارع او يتباطأ (يتحرك ببطء).



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

✍ **الحـــل:**

شكل (١)

∵ المنحنى متناقص ∴ ميل المماس للمنحنى سالب ∴ السرعة سالبة

، ∵ المنحنى محدب لأسفل ∴ المشتقة الثانية (العجلة) موجبة ∴ العجلة موجبة

∴ ع جـ < ٠ ∴ الجسيم يتحرك ببطء

شكل (٢)

∵ المنحنى متزايد ∴ ميل المماس للمنحنى موجب ∴ السرعة موجبة

، ∵ المنحنى محدب لأسفل ∴ المشتقة الثانية (العجلة) موجبة ∴ العجلة موجبة

∴ ع جـ > ٠ ∴ الجسيم يتحرك بتسارع

شكل (٣)

∵ المنحنى متزايد ∴ ميل المماس للمنحنى موجب ∴ السرعة موجبة

، ∵ المنحنى محدب لأعلى ∴ المشتقة الثانية (العجلة) سالبة ∴ العجلة سالبة

∴ ع جـ < ٠ ∴ الجسيم يتحرك ببطء

١ - ٢ تكامل الدوال المتجهه

استنتاج السرعة والإزاحة:

إذا كانت س ، ف ، ع ، جـ هى القياسات الجبرية لمتجهات الموضع والإزاحة والسرعة والعجلة على الترتيب فإنه باستخدام التكامل الغير محدد والتكامل المحدد يمكن استنتاج السرعة والأزاحة كما يلى:

أولا: استنتاج السرعة من العجلة:

من تفاضل الدوال المتجهه نعلم أن $جـ = \frac{دع}{دن}$ وبتكامل الطرفين نـجد أن:

$\therefore \int جـ\,دن = \int دع$

$\therefore ع = \int جـ\,دن$

ويمكن استبدال التكامل غير المحدد بالتكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فنجد أن:

$\because$ عند ن = ٠ تكون السرعة الإبتدائية $= ع_٠$ ويكون الموضع الإبتدائى $= س_٠$

$\therefore \int_{ع_٠}^{ع} دع = \int_٠^ن جـ\,دن$

$\therefore ع - ع_٠ = \int_٠^ن جـ\,دن$ = المساحة تحت منحنى العجلة ـ الزمن

وإذا كانت جـ ثابتة نـجد أن: $ع - ع_٠ = جـ \int_٠^ن دن$ $\therefore ع - ع_٠ = جـن$

$\therefore ع = ع_٠ + جـن$ وهو القانون الأول من قوانين الحركة بعجلة منتظمة

ولاتستخدم هذه الصورة الا فى حالة ثبوت العجلة

أما إذا كانت العجلة دالة فى الزمن فستخدم إحدى الصور التى بها تكامل حسب معطيات المسألة.

ثانيا: استنتاج الموضع والإزاحة من السرعة:

من تفاضل الدوال المتجهه نعلم أن $ع = \frac{دس}{دن}$ وبتكامل الطرفين نـجد أن:

$\therefore \int ع\,دن = \int دس$

$\therefore س = \int ع\,دن$

وباستبدال التكامل غير المحدد بالتكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فنجد أن:

$\int_{س_٠}^{س} دس = \int_٠^ن ع\,دن$

$\therefore س - س_٠ = \int_٠^ن ع\,دن$ = المساحة تحت منحنى السرعة ـ الزمن

، $\because س - س_٠ = ف$

$\therefore ف = \int_٠^ن ع\,دن$ = المساحة تحت منحنى السرعة ـ الزمن

وإذا كانت جـ ثابتة وبالتعويض عن: ع = ع. + جـ ن فيكون $س - س_. = \int_{.}^{ن} (ع_. + جـ ن) \,ءن$

$\therefore س - س_. = ع_.ن + \frac{1}{2}جـ ن^2$ $\therefore س = س_. + ع_.ن + \frac{1}{2}جـ ن^2$

$\therefore ف = ع_.ن + \frac{1}{2}جـ ن^2$ وهو القانون الثانى من قوانين الحركة بعجلة منتظمة

ثالثا: استنتاج السرعة من العجلة إذا كانت العجلة دالة فى الموضع:

من تفاضل الدوال المتجهه نعلم أن $جـ = ع \frac{ءع}{ءس}$ وبتكامل الطرفين نـجد أن:

$\therefore \int جـ \,ءس = \int ع \,ءع$

وباستبدال التكامل غير المحدد بالتكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فنجد أن:

$\therefore \int_{ع_.}^{ع} ع \,ءع = \int_{س_.}^{س} جـ \,ءس$ $\therefore \left[\frac{1}{2}ع^2\right]_{ع_.}^{ع} = \int_{س_.}^{س} جـ \,ءس$

$\therefore \frac{1}{2}(ع^2 - ع_.^2) = \int_{س_.}^{س} جـ \,ءس$ = المساحة تحت منحنى العجلة ـ الإزاحة

وإذا كانت جـ ثابتة يكون $ع^2 - ع_.^2 = 2جـ \int_{س_.}^{س} ءس$

$\therefore ع^2 - ع_.^2 = 2جـ(س - س_.)$ $\therefore ع^2 - ع_.^2 = 2جـ ف$

$\therefore ع^2 = ع_.^2 + 2جـ ف$ وهو القانون الثالث من قوانين الحركة بعجلة منتظمة

مثـــال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم مبتدأ من السكون وعلى بعد ٨ أمتار من نقطة ثابتة على الخط المستقيم فإذا كانت $جـ = 6ن - 4$ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ث^2 فأوجد العلاقة بين السرعة والزمن ، كذلك العلاقة بين الإزاحة والزمن.

الحـــل:

$\because جـ = 6ن - 4$ $\therefore ع = \int (6ن - 4) \,ءن$ $\therefore ع = 3ن^2 - 4ن + ث$

$\because$ عندما $ن = 0$ ع = ٠ ← $\therefore ث = 0$ $\therefore ع = 3ن^2 - 4ن$

∵ $س = \int ع\, ءن$ ∴ $س = \int (٣ن^٢ - ٤ن)\, ءن$

∴ $س = ن^٣ - ٢ن^٢ + ث_٢$ ، ∵ عندما $ن = ٠$ $س = ٨$ ← ∴ $ث_٢ = ٨$

∴ $س = ن^٣ - ٢ن^٢ + ٨$ ، ∵ $ف = س - س_٠$ **∴ $ف = ن^٣ - ٢ن^٢$**

حل آخر:

∵ $جـ = ٦ن - ٤$ ∴ $\frac{ءع}{ءن} = ٦ن - ٤$

∴ $\int_٠^ع ءع = \int_٠^ن (٦ن - ٤)\, ءن$ **∴ $ع = ٣ن^٢ - ٤ن$**

، ∵ $ف = \int_٠^ن ع\, ءن$ ∴ $ف = \int_٠^ن (٣ن^٢ - ٤ن)\, ءن$ **∴ $ف = ن^٣ - ٢ن^٢$**

مثـــال:

بدأت سيارة الحركة من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط ويعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن ن بالعلاقة $ع = ٣ن^٢ + ٢ن$ حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ، ن مقاسة بالثانية.أوجد كلا من عجلة الحركة وإزاحة السيارة عند $ن = ٢$

الحـــل:

∵ $ع = ٣ن^٢ + ٢ن$ ، ∵ $جـ = \frac{ءع}{ءن}$ ← ∴ $جـ = ٦ن + ٢$

عند $ن = ٢$ ← ∴ $جـ = ٦ \times ٢ + ٢ = ١٤$ م/ث^٢

، ∵ $ف = \int_٠^ن ع\, ءن$ ∴ $ف = \int_٠^ن (٣ن^٢ + ٢ن)\, ءن$ ← ∴ $ف = ن^٣ + ن^٢$

عند $ن = ٢$ ← ∴ $ف = ٢^٣ + ٢^٢ = ١٢$ م

مثـــال:

بدأت سيارة حركتها من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابته على الخط ويعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن ن بالعلاقة $ع = ٤ن - ٣ن^٢$ حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ، ن مقاسة بالثانية.أوجد خلال الفترة الزمنية ن حيث $ن \in [٠، ٤]$ كلا من السرعة المتوسطة ومتجه السرعة المتوسطة.متى تصل سرعة السيارة إلى قيمتها العظمى؟ وأوجد مقدار العجلة عندئذ.

الحـــل:

$\because$ ع $=$ ٤ن $-$ ٣ن^{٢} ، $\because$ ف $= \int_{٠}^{ن}$ ع ءن

$\therefore$ ف $= \int_{٠}^{٤}$ (٤ن $-$ ٣ن^{٢}) ءن $\leftarrow$ $\therefore$ ف $=$ [٢ن^{٢} $-$ ن^{٣}]$_{٠}^{٤}$ $=$ ٢ $\times$ ٤^{٢} $-$ ٤^{٣} $=$ $-$٣٢

$\therefore$ متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{ع_م}$ $= \frac{-٣٢ \overleftarrow{ى}}{٤} =$ $-$٨ $\overleftarrow{ى}$ م/ث حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه الحركة

لإيجاد السرعة المتوسطة يجب حساب المسافة المقطوعة ولحساب المسافة المقطوعة يجب معرفة هل الجسم غير إتجاه حركته أم لا؟ ولمعرفة ذلك نبحث إشارة ع

بوضع ع $=$ ٠ $\therefore$ ٤ن $-$ ٣ن^{٢} $=$ ٠ $\therefore$ ن(٤ $-$ ٣ن) $=$ ٠

$\therefore$ ن $=$ ٠ أو ن $= \frac{٤}{٣}$ ويوضح الشكل المجاور بحث إشارة ع

(٠ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ن ؛ إشارة ع: +++++ ثم - - - - - -)

$\therefore$ الجسم غير إتجاه حركته خلال الفترة [٠، ٤] عند ن $= \frac{٤}{٣}$

$\therefore$ المسافة المقطوعة خلال الفترة [٠، ٤] $= \int_{٠}^{\frac{٤}{٣}} |٤ن - ٣ن^{٢}| ءن + \int_{\frac{٤}{٣}}^{٤} |٤ن - ٣ن^{٢}| ءن$

$= \left| [٢ن^{٢} - ن^{٣}]_{٠}^{\frac{٤}{٣}} \right| + \left| [٢ن^{٢} - ن^{٣}]_{\frac{٤}{٣}}^{٤} \right| = \frac{٣٢}{٢٧} + \left| -٣٢ - \frac{٣٢}{٢٧} \right| = \frac{٩٢٨}{٢٧}$

$\therefore$ السرعه المتوسطة خلال الفترة [٠، ٥] $= \frac{٩٢٨}{٢٧} \div ٤ = \frac{٢٣٢}{٢٧}$ م/ث

$\because$ ع $=$ ٤ن $-$ ٣ن^{٢} $\therefore$ جـ $=$ ٤ $-$ ٦ن

$\therefore$ سرعة السيارة تصل إلى قيمتها العظمى عندما جـ $=$ ٠ $\therefore$ ٤ $-$ ٦ن $=$ ٠ $\therefore$ ن $= \frac{٢}{٣}$ ث

مثـــال:

سيارة تتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث من موضع يبعد ٤ أمتار فى الإتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان جـ $=$ س $-$ ٤ فأوجد:

(أ) ع^{٢} بدلالة س

(ب) أوجد سرعة السيارة عندما جـ $=$ ٠

الحـــل:

(أ) $\because$ جـ $=$ س $-$ ٤ ، $\because \int$ جـ ءس $= \int$ ع ءع

$\therefore \int_{ع_0}^{ع} ع\,ءع = \int_{س_0}^{س} جـ\,ءس$ $\therefore \int_{12}^{ع} ع\,ءع = \int_{4}^{س} (س - 4)\,ءس$

$\therefore \left[\frac{1}{2}ع^2\right]_{12}^{ع} = \left[\frac{1}{2}س^2 - 4س\right]_{4}^{س}$

$\therefore \frac{1}{2}ع^2 - \frac{1}{2} \times 12^2 = (\frac{1}{2}س^2 - 4س) - (\frac{1}{2} \times 4^2 - 4 \times 4)$

$\therefore \frac{1}{2}ع^2 - 72 = \frac{1}{2}س^2 - 4س + 8$ $\therefore \frac{1}{2}ع^2 = \frac{1}{2}س^2 - 4س + 8 + 72$

$$\therefore ع^2 = س^2 - 8س + 160$$

(ب) عندما جـ = ٠ $\therefore س - 4 = 0$ $\therefore س = 4$ بالتعويض فى ع

$\therefore ع^2 = 4^2 - 8 \times 4 + 160 = 144$ $\therefore ع = \sqrt{144} = 12$ م/ث

مثـــال:

جسم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٢ م/ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان $جـ = هـ^{س}$ أوجد $ع^2$ بدلالة س ثم أوجد ع عندما س = ٤ متر ، أوجد س عندما ع = ٢٠ م/ث

الحـــل:

$\because جـ = هـ^{س}$ ، $\because \int جـ\,ءس = \int ع\,ءع$

$\therefore \int_{ع_0}^{ع} ع\,ءع = \int_{س_0}^{س} جـ\,ءس$ $\therefore \int_{2}^{ع} ع\,ءع = \int_{0}^{س} هـ^{س}\,ءس$

$\therefore \left[\frac{1}{2}ع^2\right]_{2}^{ع} = \left[هـ^{س}\right]_{0}^{س}$ $\therefore \frac{1}{2}ع^2 - \frac{1}{2} \times 2^2 = هـ^{س} - هـ^{0}$

$\therefore \frac{1}{2}ع^2 - 2 = هـ^{س} - 1$ $\therefore \frac{1}{2}ع^2 = هـ^{س} - 1 + 2$

$$\therefore ع^2 = 2هـ^{س} + 2$$

عندما س = ٤ متر $\therefore ع^2 = 2هـ^{4} + 2$ $\therefore ع = \pm\sqrt{2هـ^{4} + 2}$ م/ث

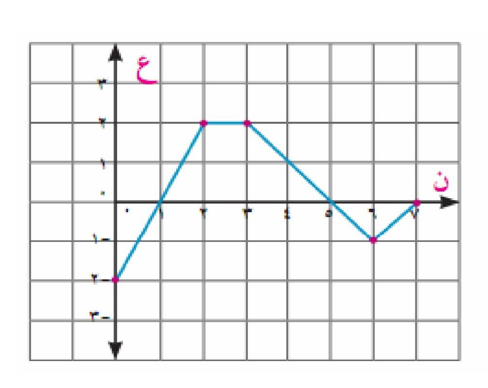
عندما ع = ٢٠ م/ث $\therefore (20)^2 = 2هـ^{س} + 2$ $\therefore 2هـ^{س} + 2 = 400$

$\therefore 2هـ^{س} = 400 - 2$ $\therefore 2هـ^{س} = 398$ $\therefore هـ^{س} = \frac{398}{2}$

$\therefore هـ^{س} = 199$ بالتحويل للصورة اللوغاريتمية $\therefore س = لو_{هـ} 199$

مثـــــال:

من منحنى السرعة - الزمن المقابل فإن مقدار الازاحة ....



(أ) ٣ وحدة طول

(ب) ٥ وحدة طول

(ج) ٧ وحدة طول

(د) ٨ وحدة طول

الحـــــل:

∵ مقدار الإزاحة = المساحة بين المنحنى وفوق محور السينات − المساحة بين المنحنى وتحت محور السينات

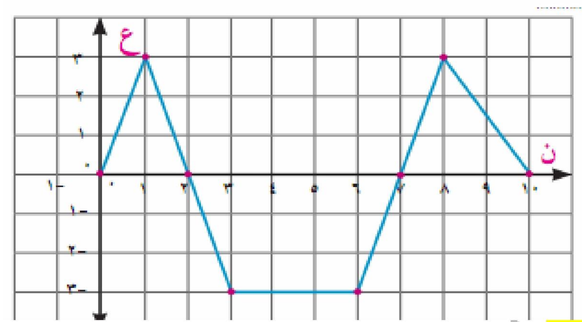
∴ مقدار الإزاحة = مساحة شبه المنحرف − (مساحة المثلث الأول + مساحة المثلث الثانى)

$$= \frac{1}{2}(٤+١)\times ٢ - (\frac{1}{2}\times ١\times ٢ + \frac{1}{2}\times ٢\times ١)$$ وحدة طول

$$= ٥ - (١+١) = ٥ - ٢ = ٣$$ وحدة طول

مثـــــال:

من منحنى السرعة - الزمن المقابل ،فإن المسافة المقطوعة = ...



(أ) ٤,٥ وحدة طول

(ب) ١٠,٥ وحدة طول

(ج) ١٣,٥ وحدة طول

(د) ١٩,٥ وحدة طول

الحـــــل:

∵ المسافة المقطوعة = المساحة بين المنحنى وفوق محور السينات + المساحة بين المنحنى وتحت محور السينات

∴ المسافة المقطوعة = (مساحة المثلث الأول + مساحة المثلث الثانى) + مساحة شبه المنحرف

$$= (\frac{1}{2}\times ٢\times ٣ + \frac{1}{2}\times ٣\times ٣) + \frac{1}{2}(٥+٣)\times ٣$$

$$= (٣ + ٤,٥) + ١٢ = ٧,٥ + ١٢ = ١٩,٥$$ وحدة طول

مثـــــال:

قذف جسيم رأسيا لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦,٥ م/ث من نقطة على إرتفاع ٤,٥ ٢ متر من سطح الأرض أوجد كل من ع ، س بدلالة ن ثم أوجد أقصى إرتفاع يصل اليه الجسيم عن سطح الأرض.

الحـــل:

$\because$ الجسيم قذف رأسيا لأعلى $\therefore$ جـ $= -$ ء $= -9,8$ ، $\because$ ع $= \int$ جـ ءن

$\therefore$ ع $= \int (-9,8)$ ءن $\therefore$ ع $= -9,8$ن $+$ ث

$\because$ عند ن $= 0$ تكون ع. $= 6,5$ $\therefore$ ث $= 6,5$ $\therefore$ **ع $= -9,8$ن $+ 6,5$**

، $\because$ س $= \int$ ع ءن $\therefore$ س $= \int (-9,8$ن $+ 6,5)$ ءن $\therefore$ س $= -4,9$ن$^2 + 6,5$ن $+$ ث$_2$

$\because$ عند ن $= 0$ تكون س. $= 24,5$ $\therefore$ ث$_2 = 24,5$ $\therefore$ **س $= -4,9$ن$^2 + 6,5$ن $+ 24,5$**

أقصى إرتفاع يصل اليه الجسيم عندما ع $= 0$ $\therefore$ $-9,8$ن $+ 6,5 = 0$ $\therefore$ ن $= \frac{6,5}{9,8} = \frac{4}{7}$ ث

$\therefore$ س $= -4,9 (\frac{4}{7})^2 + 6,5 \times \frac{4}{7} + 24,5 = 26,1$ متر من سطح الأرض

مثـــال:

يتحرك جسيم فى خط مستقيم مبتدئا من نقطة ثابتة على المستقيم فإذا كان القياس الجبرى لسرعتة بعد (ن) ثانية من لحظة البدء يعطى بالعلاقة ع $= (3 + 5$ن $-$ ن$^2)$ سم/ث أوجد:

اولا: بعد الجسيم عن نقطة البدء بعد 6 ثوان.

ثانيا: المسافة المقطوعة فى الثانية السادسة من حركته.

الحـــل:

$\because$ ع $= (3 + 5$ن $-$ ن$^2)$ ، $\because$ ف $= \int_0^{ن}$ ع ءن

اولا: بعد الجسيم عن نقطة البدء بعد 6 ثوان

$\therefore$ ف $= \int_0^{ن} (3 + 5$ن $-$ ن$^2)$ ءن $= \left[3ن + \frac{5}{2}ن^2 - \frac{1}{3}ن^3\right]_0^{ن}$

$\therefore$ ف $= 3$ن $+ \frac{5}{2}$ن$^2 - \frac{1}{3}$ن^3

عند ن $= 6$ $\therefore$ ف $= 3 \times 6 + \frac{5}{2} \times 6^2 - \frac{1}{3} \times 6^3 = 18 + 90 - 72 = 36$ سم

ثانيا: المسافة المقطوعة فى الثانية السادسة من حركته.

لحساب المسافة المقطوعة يجب معرفة هل الجسم غير إتجاه حركته أم لا؟ ولمعرفة ذلك نضع ع $= 0$

$\therefore 3 + 5$ن $-$ ن$^2 = 0$ $\therefore$ ن$^2 - 5$ن $- 3 = 0$

$\therefore \text{ن} = \frac{٥ + \sqrt{٣٧}}{٢} \simeq ٥,٥$ أو $\text{ن} = \frac{٥ - \sqrt{٣٧}}{٢} \simeq -٠,٥$

∴ الجسم غير إتجاه حركته خلال الثانية السادسة

$$\therefore \text{ف} = \int_{٥}^{٥,٥} \left|٣ + ٥\text{ن} - \text{ن}^٢\right| \text{ءن} + \int_{٥,٥}^{٦} \left|٣ + ٥\text{ن} - \text{ن}^٢\right| \text{ءن}$$

$$= \left|\left[٣\text{ن} + \frac{٥}{٢}\text{ن}^٢ - \frac{١}{٣}\text{ن}^٣\right]_{٥}^{٥,٥}\right| + \left|\left[٣\text{ن} + \frac{٥}{٢}\text{ن}^٢ - \frac{١}{٣}\text{ن}^٣\right]_{٥,٥}^{٦}\right|$$

$$= \left|\frac{١١٠}{٣} - \frac{٢١٥}{٦}\right| + \left|٣٦ - \frac{١١٠}{٣}\right| = \frac{٥}{٦} + \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٢} = ١,٥ \text{ سم}$$

ملاحظة:

يمكن إيجاد المسافة المقطوعة فى الثانية السادسة بدون بحث هل الجسم غير إتجاه حركته أم لا؟ وذلك بحساب التكامل المحدد باستخدام الآلة الحاسبة كمايلى:

$$\therefore \text{ف} = \int_{٥}^{٦} \left|٣ + ٥\text{ن} - \text{ن}^٢\right| \text{ءن} \simeq ١,٥ \text{ سم}$$

مثــــال:

إذا كانت العجلة التى يتحرك بها جسيم على خط مستقيم = (٥ − ٤ف) م/ث² حيث ف بعد الجسيم عن نقطة البدء، فإذا بدأ الجسيم حركته بسرعة ١٠$\sqrt{٣}$ م/ث. فأوجد أقصى بعد للجسيم عن نقطة البدء.

الحــــل:

$\because \text{جـ} = (٥ - ٤\text{ف})$ ، $\because \int \text{جـ ءف} = \int \text{ع ءع}$

$\therefore \int \text{ع ءع} = \int (٥ - ٤\text{ف})\, \text{ءف}$ $\therefore \frac{١}{٢}\text{ع}^٢ = ٥\text{ف} - ٢\text{ف}^٢ + \text{ث}$

∵ عندما ف = ٠ ع = ١٠$\sqrt{٣}$ $\therefore \frac{١}{٢} \times (١٠\sqrt{٣})^٢ = \text{ث}$ $\therefore \text{ث} = ١٥٠$

∵ أقصى بعد للجسيم عندما ع = ٠ $\therefore \frac{١}{٢}\text{ع}^٢ = ٥\text{ف} - ٢\text{ف}^٢ + ١٥٠$

$\therefore ٠ = ٥\text{ف} - ٢\text{ف}^٢ + ١٥٠$ $\therefore ٢\text{ف}^٢ - ٥\text{ف} - ١٥٠ = ٠$

$\therefore (\text{ف} - ١٠)(٢\text{ف} + ١٥) = ٠$ $\therefore \text{ف} = ١٠$ أو $\text{ف} = \frac{-١٥}{٢}$

∴ أقصى بعد للجسيم عن نقطة البدء = ١٠ م